1. Dado el conjunto descripto en coordenadas cartesianas por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ hallar su volumen máximo sabiendo que $b + c = 4,\ b > 0,\ c > 0$.

2. Calcular el área de la superficie descripta en coordenadas cartesianas por:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

3. Sea $h : R \to R$ la solución del problema $h' - h = 2x,\ h(0) = 1$.
Sea C la curva definida por las ecuaciones:
$$\begin{cases} 2 - x^2 - y^2 &= z \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{cases}$$
Calcular la circulación del campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2y, xy^2 + z, yh(x) - 3ye^x)$ sobre C, recorrida de forma tal que la tangente a la curva en el punto $(\sqrt{2}, 0, 0)$ tenga componente y positiva.

4. Sea C la curva determinada por la intersección del plano tangente a la superficie de ecuación $y = 4 - x^2 - z^2$ en el punto $(1, 2, 1)$ con la superficie de ecuación $z = x^2$.
Hallar la circulación del campo vectorial $F(x, y, z) = (x - y, x, z)$ a lo largo de la curva C desde $(0, 6, 0)$ hasta $(1, 2, 1)$.

5. Sea $F(x, y, z) = (x + e^y, y + \text{sen}(xz), z)$.
Sea V el cilindro $V = \{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq a\}$
Demostrar que el flujo saliente de F a través de la superficie lateral del cilindro es el doble del fujo saliente de F en las tapas para todo $a > 0, r > 0$.

1. Hallar los puntos de la curva de ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ más cercanos al origen de coordenadas.

2. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x, z, -y)$ a través de la superficie de ecuación $x = z^2 + y^2$ con $0 \leq x \leq 4$, $z \leq y$ orientada de modo tal que la normal tenga componente x positiva.

3. Sea f un campo escalar definido en $\mathbb{R}^2$, diferenciable y tal que $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ ambas no nulas para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Si $h(x) = f(x^2 g(x), g(x) + x^2)$, hallar la familia de funciones g con derivada primera continua tales que $h'(x) = 0$.

4. La integral de línea de un campo vectorial $\vec{F}$ sobre una curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (3cos(t), 0, 3sen(t))$, $0 \leq t \leq \pi$ es igual a -36. Calcular la integral de línea del campo $\vec{F}$ a lo largo del eje x desde $(-3, 0, 0)$ hasta $(3, 0, 0)$ sabiendo que $rot(\vec{F}(x, y, z)) = (2z, -z, 1)$.

5. Dado el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = 3\dfrac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$, $\vec{r} \neq 0$, siendo $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ el vector posición y $||\vec{r}||$ su norma.

   a) Probar que $div(\vec{F}(\vec{r})) = 0$ para todo $\vec{r} \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$

   b) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie cerrada y orientable tal que $(0, 0, 0) \notin S$ y V es el volumen encerrado por S. Probar que el flujo saliente de $\vec{F}$ a través de S, es:
   $$\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 12\pi & si \quad (0,0,0) \in V \\ 0 & si \quad (0,0,0) \notin V \end{cases}$$

Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (z - ye^x, 2z - e^x, 3z^2)$ a lo largo de la curva parametrizada por $\vec{X}(t) = (2\cos(t), 1 - 2\cos(t) - 2\,\text{sen}(t), 2\,\text{sen}(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sea $\vec{F}(x,y) = (y^2 + g(y), xg'(y))$, con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^2(\mathbb{R})$. Sea C el arco de curva de ecuación $y = 2\sqrt{4 - x^2}$ recorrido desde el punto $(-2,0)$ hasta el punto $(2,0)$. Hallar el valor de $\vec{F}(0,0)$ para que la circulación del campo $\vec{F}$ sobre la curva C sea igual a 12.

Calcular el volumen del sólido
$K = \left\{(x,y,z) \in R^3 : x \geq \sqrt{z^2 + y^2}\ ;\ (x-2)^2 + z^2 + y^2 \geq 2\ ;\ x \leq 1\right\}$ y graficarlo.

Hallar la mínima distancia de la curva plana $x = y^2$ al punto donde la curva C interseca al eje y con $y > 0$, siendo C la curva que pasa por $(-18, 0)$ y es solución de $1 = 4y\ y'$.

Sean S el plano de ecuación $z = x + y$ limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2$ y el campo $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z + h(x,y))$ siendo h un campo escalar continuo definido en $\mathbb{R}^2$. Sabiendo que el flujo de $\vec{F}$ a través de S es igual a 7 tomando la componente z de la normal positiva, calcular el flujo de $\vec{F}$ a través del plano $z = 0$ limitado por el mismo cilindro tomando la componente z de la normal negativa.

1. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1,\ a > 0,\ b > 0\}$. Hallar los valores de a y b de modo tal que $\iint_D 4x^2 dx\ dy$ tome su valor máximo sabiendo que $a^2 + b^2 = 5$.

2. Sea $\vec{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{r} \neq \vec{0}$ y $||\vec{r}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Demostrar que $\nabla \cdot (\vec{r}\ ||\vec{r}||^{-7}) = -4\,||\vec{r}||^{-7}$.

3. Sean $\vec{f}(x,y,z) = (xy, y, z)$, $g(x,y,z) = z + z^2\ w(x) - 2z\ w(y)$ ambas definidas sobre $\mathbb{R}^3$ y $w \in C^1(\mathbb{R})$. Si $\vec{h} = \vec{f} + \nabla g$, calcule la circulación de $\vec{h}$ sobre el trozo de la curva intersección de las superficies de ecuaciones: $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$, desde $(0,0,z_0)$ hasta $(1,1,z_1)$.

4. Sea C la curva de la familia de soluciones de la ecuación $xdx + (y-1)dy = 0$ que pasa por $P_0 = (0,2)$. Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x,y) = (xe^{sh(x)} - \mu xy + y, 2x + cos(ye^y))$, siendo μ una constante real. Determinar que la circulación de $\vec{f}$ sobre C, orientada positivamente, es independiente de μ.

5. Sean S una porción de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ de área 5 y su borde, C, una curva simple y suave. Calcular la circulación del campo $\vec{f}(x,y,z) = (2yz, x, yx)$ sobre C. Indicar mediante un gráfico la orientación elegida para la curva C.

1. Sea C la curva de la familia ortogonal a $y = Kx^2$ que pasa por el punto $(2, 1)$. Dado $\vec{f}(x, y) = (xy, x)$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcular la circulación en sentido positivo del campo $\vec{f}$ sobre la curva C.

2. Dado $\vec{f}(x, y, z) = (4x, 2y, 4z)$, con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cuya función potencial satisface $\Phi(\vec{0}) = 0$. Comprobar que la ecuación del plano tangente a la superficie equipotencial que pasa por (0,1,0) es $y = 1$ y hallar el volumen del sólido encerrado por ese plano y la superficie equipotencial de potencial igual a 4 con $y \geq 1$.

3. Hallar $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ de modo tal que $f(x, y) = x + y$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alcance un máximo de valor 4 sobre la circunferencia de radio r centrada en el origen. Interpretar geométricamente considerando los conjuntos de nivel de f.

4. Dada $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ y el campo $\vec{f}(x, y, z) = (x - y, e^{xz}, 2z)$, con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calcular el flujo de $\vec{f}$ a través de S, indicando en un gráfico el sentido de la normal utilizada.

5. Sea la superficie, contenida en $\mathbb{R}^3$, dada por $x^2 + z^2 = (y + 1)^2$ con $0 \leq y \leq 1$, orientada con el campo de normales $\vec{N}$ tales que $\vec{N}(x, y, z) \cdot (0, 1, 0) < 0$.
   Si $\vec{F}(x, y, z) = (x + y + z, e^{xy^2z} cos(x^2 + y), 2xyz)$, con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, hallar el flujo de $\nabla \times \vec{F}$ a través de la superficie.

1. Si C es la curva de la familia de soluciones de la ecuación diferencial $xy' - 2y = 3x$ que pasa por $(1,0)$, calcular la circulación del campo vectorial definido en $\mathbb{R}^2$, $\vec{f}(x,y) = (y + 3x, -x)$ a lo largo del trozo de C desde $(1,0)$ hasta $(2,6)$.

2. Sea $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{g}(x,y) = 2p(x,y)\nabla p(x,y) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}(x,y), \frac{\partial p}{\partial x}(x,y)\right)$, siendo p el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $P_0 = (1,2)$ de un campo escalar $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$, cuya matriz hessiana en P_0 es: $H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular la circulación de $\vec{g}$ sobre la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 4y$, recorrida en sentido negativo.

3. Si $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + yz$ representa, en grados, la temperatura en cualquier punto (x,y,z) de la curva dada por las ecuaciones $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 1$, $z = y$ contenida en $\mathbb{R}^3$. Determinar los puntos más fríos y más calientes de la curva y la temperatura en cada uno de ellos.

4. Sea el sólido $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le y\}$, una cuña; S_0 la cara de D contenida en el plano de ecuación $x = 1$ y S_1 la unión de las otras cuatro caras de la cuña. Sean $\vec{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ un campo vectorial y $\vec{F}(x,y,z) = (2, y^2 + 2z, kyz)$, $k \in \mathbb{R}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   Hallar k tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{G}$ y calcular la circulación del campo $\vec{G}$ sobre el borde de S_1. Indicar en un gráfico la orientación elegida para el borde de S_1.

5. Sea S la porción de la superficie esférica dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ contenida en $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-a)^2 + y^2 \le a^2,\ z > 0\}$.

   a) Graficar y calcular el área de S.

   b) Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{f}(\vec{r}) = k\frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$, siendo $\vec{r} = (x,y,z)$, con $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ y la constante $k \in \mathbb{R}$, a través de S orientada con el campo de normales $\vec{N}$ tales que $\vec{n}(x,y,z) \cdot (1,0,0) > 0$.

1. Sea $\vec{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $rot\vec{F}(x,y,z) = (z-2\,x, y, x^2+y^2+z)$ y sea S la superficie dada por la ecuación $x^2+y^2+z^2 = 25$ con $y \geq -4$. Calcular la circulación de $\vec{F}$ sobre el borde de S indicando en un gráfico el sentido de circulación utilizado.

2. Sean $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$ un campo escalar y $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ un campo vectorial solenoidal ($div\vec{F} = 0$) tales que $\nabla h(x,y,z) \perp \vec{F}(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 4\}$. Si $\vec{G}(x,y,z) = h(x,y,z)\,\vec{F}(x,y,z)$, probar que el flujo de $\vec{G}$ a través de S es nulo.

3. Sean $\vec{f}(x,y,z) = (x, y/2, z)$ y C la curva parametrizada por $\vec{\gamma}(t) = (e^t, e^{t/2}, e^t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

   a) Comprobar que C es la línea de campo del campo $\vec{f}$ que pasa por (1,1,1).

   b) Hallar el flujo de $\vec{f}$ a través del plano normal a C en el punto (1,1,1) en el primer octante, con sentido de la normal alejándose del origen de coordenadas.

4. Sea C la frontera, con orientación antihoraria, de la región D descripta en coordenadas polares por $0 < r < 2\,(\cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta))$. Definir una función escalar h, **cuyo dominio sea** $\mathbb{R}$, tal que la circulación de $\vec{f}$ sobre C coincida con el área de D, siendo $\vec{f}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\vec{f}(x,y) = \nabla h(x^2\,y) + (x\,e^x + 2\,x\,y, x\,h(x) - e^y\,\cos(y^3))$.

5. Hallar los puntos de la superficie $z = \sqrt{x\,y+1}$ más cercanos al origen.

1. Sea C la curva plana determinada por la línea de campo de $\vec{f}(x,y) = (2\,y, -\frac{x}{2})$ que pasa por (0,1). Hallar la circulación de $\vec{f}$ sobre C orientada positivamente.

2. Sea K el cuerpo que ocupa la región $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \quad x^2 + z^2 \leq y\}$. Calcular la masa de K si la densidad en cada punto es el doble de la distancia desde el punto al plano xz.

3. Sea $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ con $\vec{G} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ un campo vectorial. Se sabe que sobre el plano $z = 0$, $\vec{G}(x,y,0) = (-y, x, e^{x\,y})$. Sea S_k la superficie de ecuación $z = k\,(4 - x^2 - y^2)$ con $z \geq 0$ y k una constante real positiva, orientada de forma tal que $\breve{n} \cdot (0,0,1) < 0$, $\breve{n}$ indica el campo de versores normales a S_k. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S_k y mostrar sin usar la expresión de $\vec{G}$ que dicho flujo no depende de k.

4. Sean S el trozo de la superficie cilíndrica de ecuación $y = 4 - x^2$ con $z \leq y$, en el primer octante, orientada con el versor normal $\breve{n}$ tal que $\breve{n} \cdot (1,0,0) > 0$ y el campo $\vec{f}(x,y,z) = (6\,a\,y, -6\,a^2\,x\,y, x\,z)$ con $a \in \mathbb{R}$ constante, definido sobre $\mathbb{R}^3$. Hallar el área de la proyección de S sobre el plano yz y determinar, si existe, un valor de a para que el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie S sea igual a 8 veces el área de dicha proyección.

5. Hallar los extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2$ restringida al arco de curva dada en coordenadas polares por la ecuación $r - 2\cos(\theta) = 0$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Graficar el arco de curva e interpretar geométricamente.

1. Hallar el área de $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2x,\ z \leq 4 - (x^2 + y^2), z \geq 0\}$

2. Calcular la masa del cuerpo limitado por las inecuaciones $x^2 + 2y^2 \leq z \leq 2 - x^2$ en el primer octante, sabiendo que el gradiente de la densidad volumétrica es: $\nabla\delta(x, y, z) = (2xy, x^2, 0)$ y $\delta(0, 0, 0) = 1$

3. Sea $\vec{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\vec{F}(\vec{r}) = h(||\vec{r}||)\ \vec{r}$, un campo radial, siendo $h(||\vec{r}||) \neq 0$ para todo $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivada continua. Hallar una expresión para la familia de las líneas de campo de $\vec{F}$ y hallar la familia ortogonal a dicha familia.

4. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x\, h(y) + 4\ e^{-y},\ h(y) - y,\ h(x) - yx)$ definido sobre $\mathbb{R}^3$. Hallar una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivada continua tal que el flujo del campo a través de cualquier superficie cerrada, orientable y regular sea nulo sabiendo, además, que $\vec{F}(0, 0, 0) = (4, 0, 0)$. Con la función h encontrada, calcular el flujo del campo a través de
$S = \{(x, y, z) : x = 1 + \sqrt{y^2 + z^2},\ x \leq 4\}$, indicando en un gráfico la normal utilizada.

5. Hallar $a > 0$ de manera que resulte máxima la circulación del campo
$\vec{F}(x, y) = (yx^2 + sen(x) - 3y,\ 6x + e^y - xy^2)$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ recorrida en sentido positivo.

1. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x, e^{sen(z)}, cos(x\,y))$ y S la superficie de ecuación $x = 2 - \sqrt{4 - y^2 - z^2}$. Calcular el flujo del campo $\vec{F}$ a través de S orientada de manera que la coordenada x de su vector normal resulte positiva.

2. Sean la curva C definida por las ecuaciones $y^2 + z^2 = 16$ y $x + z = 4$ con $x \leq 2$ y g un campo escalar con derivada continua en $\mathbb{R}$. Calcular la circulación del campo $\vec{F}(x, y, z) = (g(x), \dfrac{-z}{y^2 + z^2}, \dfrac{y}{y^2 + z^2})$ sobre C, indicando claramente en un gráfico la orientación elegida para la curva.

3. Calcular la masa de la porción de superficie cónica dada por $4z^2 = x^2 + y^2$ con $0 \leq z \leq 1$ y $x \leq y$, sabiendo que la densidad superficial de masa en cada punto es proporcional a su distancia al plano xy.

4. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (y + 2, x)$.

   a) Demostrar que $\vec{F}$ es un campo de gradientes y hallar las líneas de campo de $\vec{F}$.

   b) Probar que las líneas de campo y las curvas equipotenciales de $\vec{F}$ son familias de curvas ortogonales.

5. Dada la ecuación diferencial $dx + x^2 dy = 0$ hallar la solución que pasa por $(1/2\ , 2)$. Si C es un arco de esa curva de extremos $(1/2, y(1/2))$ y $(2, y(2))$, hallar la mínima distancia del origen a la curva C.